Christoph Hammer:

Lesen, Schreiben und Sprechen im Mathematikunterricht

„Das KMK-Projekt *ProLesen. Auf dem Weg zur Leseschule* begreift die Förderung der Lesekompetenz als eine Aufgabe aller Fächer" (Ruch/Sachse, 2008). Dieser Auffassung muss nachdrücklich zugestimmt werden. Jedoch wird häufig insbesondere im Fach Mathematik die Fähigkeit zu verständnisvollem Umgang mit Texten als gegeben vorausgesetzt und die Förderung bei Defiziten als Aufgabe des Deutschunterrichts gesehen. Es ist sachlich und pädagogisch problematisch, die „Zuständigkeiten" in dieser Weise trennen zu wollen. Spätestens seit Veröffentlichung der ersten PISA-Ergebnisse ist klar, dass eine solche Trennung ohnehin unmöglich ist. Die Untersuchungen zeigen beeindruckende Korrelationen zwischen den drei getesteten Bereichen „Lesen", „Mathematik" und „Naturwissenschaften". Gute Leseleistung ist also ein hervorragender Prädiktor für gute Werte in den anderen Bereichen und umgekehrt (Baumert et al., 2002). Förderung in einem der Bereiche kommt also den anderen zugute, was die eingangs zitierte Grundthese des Projekts „ProLesen" untermauert.

Der erste Teil dieses Aufsatzes beschäftigt sich mit der Rolle von Texten im Mathematikunterricht. Im Hinblick auf die Förderung von Schülern wird ein umfassender Ansatz vertreten, der nicht nur passiven (Lesen), sondern auch aktiven (Schreiben, Sprechen) Sprachgebrauch beinhaltet. In diesem Sinn werden im zweiten Teil Anregungen dafür gegeben, wie interessante und gehaltvolle Anlässe für den Sprachgebrauch im Mathematikunterricht geschaffen werden können. Abschließend wird ein kurzer Blick darauf geworfen, wie sich das Bild von Mathematik in einem anregenden Unterricht entwickeln kann.

1. Sprache im Mathematikunterricht

Mathematische Texte sind begrifflich abstrakt und häufig nicht verständnisfördernd. Sie haben eine hohe Informationsdichte und weisen geringe Redundanzen auf. Oft werden Codes und Abkürzungen verwendet, die den Eindruck einer formalen Fremdsprache vermitteln, die schwer zu erlernen ist. Zum Beispiel wird im lesenswerten Buch „Der Zahlenteufel" (Enzensberger, 1997) versucht, durch lautmalerische Begriffe („hopsen" statt „potenzieren", „fünf wumm!" statt „fünf Fakultät") Hemmschwellen zu senken und mathematische Texte „lesbarer" zu machen. Im Unterricht stellt sich das Problem vor allem dann, wenn Schüler ungenau oder sogar falsch formulieren und Zeichen nicht vereinbarungsgemäß verwenden (z. B. $\overline{AB} \neq [AB]$). Dazu sei an Wagenschein erinnert, der als „Regel" für Lehrpersonen formuliert hat: „Erst die Muttersprache, dann die Fachsprache (und immer wieder auch zurück zur Muttersprache). Die Muttersprache ist die Sprache des Verstehens, die Fachsprache besiegelt das Ergebnis in einem letzten Arbeitsgang" (Wagenschein, 1968).

Eine inhaltliche Schwierigkeit entsteht durch die zweiwertige Logik der Mathematik, in der es ausschließlich richtig (wahr) oder falsch gibt. Vielen außermathematischen Situationen, in denen es auch teilweise richtige oder manchmal falsche Aussagen gibt, wird dies nicht gerecht. Daher rühren auch Verständnisprobleme bei Widerspruchsbeweisen, die Mathematiker oft besonders elegant finden (Maier/Schwaiger, 1999).

Schriftliche Texte kommen im Mathematikunterricht üblicherweise als Aufgabentexte (Textaufgaben) und Illustrationen (Diagramme) vor. Instruktionstexte im Schulbuch sind meist kurz und werden nur gelegentlich an bedeutsamen Stellen eingesetzt. Die Lehrbücher dienen vorwiegend als Aufgabensammlungen. Hinzu kommen informative Texte („Zum Weiterlesen"), in denen zum Beispiel historische Hintergründe oder Anwendungsbezüge dargestellt werden.

1.1 Textaufgaben

Schüler und Lehrkräfte sind sich vermutlich einig, dass Textaufgaben ein wesentliches Problem darstellen. Und das, obwohl die Aufgabentexte in einem lexikalischen Sinn meist leicht zu verstehen sind. Da jedoch Lesen „kein(en) passive(n) Prozess der Bedeutungsentnahme, sondern eine aktive Konstruktionsleistung des Individuums dar(stellt)" (Artelt et al., 2007), kommt es nicht nur auf die Beschaffenheit des Textes, sondern auch auf Merkmale des Lesers an. Leseförderung muss daher in zwei Richtungen zielen. Zum einen gilt es, Hilfsmittel zu entwickeln, mit denen Texte inhaltlich geordnet und strukturiert werden können. Zum anderen geht es darum, die Inhalte in das Wissensnetz des Lesers zu integrieren und dabei auch motivationale Aspekte zu berücksichtigen. Eine umfassende Darstellung findet sich in der bereits zitierten Expertise (Artelt et al., 2007).

In der gängigen Unterrichtspraxis wird diesen Ansprüchen weitgehend Rechnung getragen. Schon in der Grundschule werden Strategien der Zusammenfassung und Strukturierung von Texten in eigenen Worten („Was wir wissen …", „gegeben – gesucht") umgesetzt. Weitere Möglichkeiten, wie die Formulierung eigener Fragen, die Kennzeichnung von wichtigen und überflüssigen Angaben oder die Anfertigung einer informativen Skizze, gehören zum Standardrepertoire ebenso wie die Aktivierung von Vorkenntnissen und die Klärung der Bedeutung von Fachausdrücken. Letzteres ist insbesondere deswegen von Interesse, weil die Anzahl neuer Begriffe im Mathematikunterricht meist unterschätzt wird. In einem für die 5. Jahrgangsstufe zugelassenen Unterrichtswerk wurden z. B. 172 neue Fachausdrücke gezählt (Maier/Schwaiger, 1999).

These 1: Probleme mit Textaufgaben liegen weniger im Textverständnis als bei der Übertragung der Sachsituation in die Sprache der Mathematik.

Diese Problemstellung ist Teil der in den KMK-Bildungsstandards (Kultusministerkonferenz, 2003) erläuterten allgemeinen mathematischen Kompetenz „Modellieren", die zur Lösung realer Probleme mithilfe der Mathematik erforderlich ist. Solche Aufgaben werden in einem oder mehreren Zyklen eines Kreislaufs bearbeitet, dessen einzelne Schritte in folgender Grafik dargestellt sind:

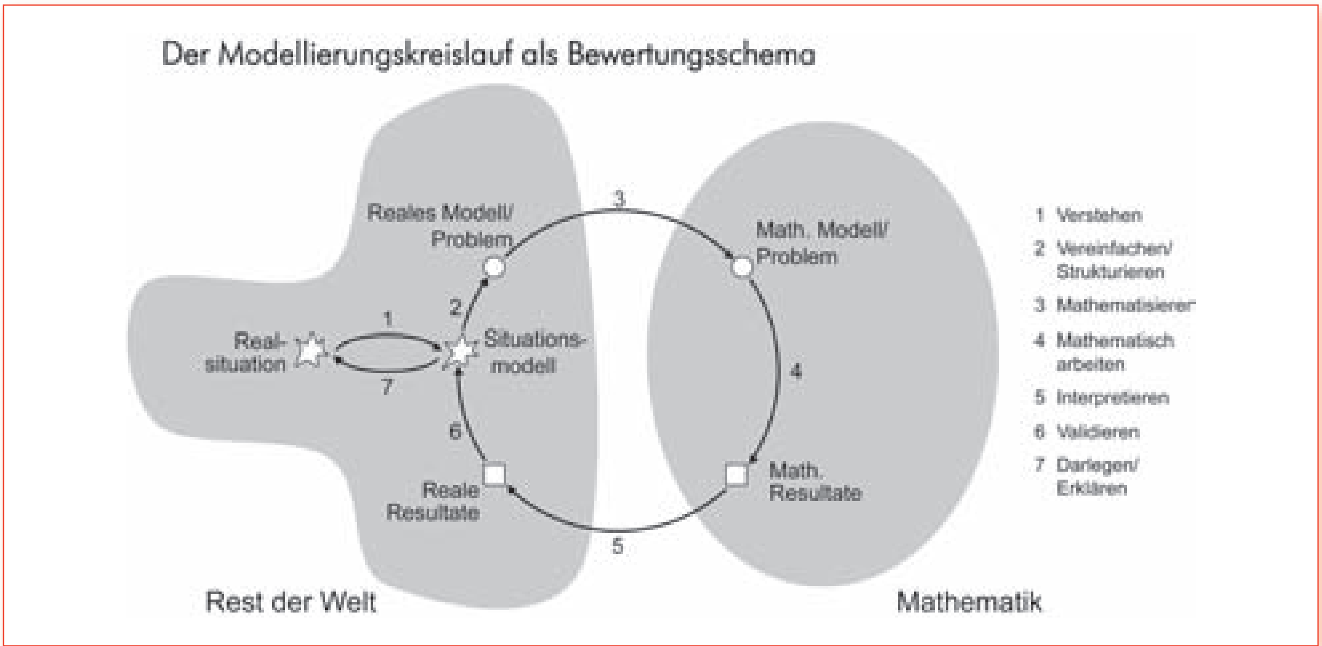


Abb. 1: Modellierungskreislauf (Blum/Leiss, 2005)

Die hier angesprochenen Schwierigkeiten beim Bearbeiten von Textaufgaben liegen zunächst im dritten Schritt, in dem die Verbindung zwischen dem „Rest der Welt“ und der Mathematik herzustellen ist. Zwei Aufgabenbeispiele sollen dies verdeutlichen:

- Wie muss man ein 18-Gang-Fahrrad schalten, um der Reihe nach vom ersten bis zum 18. Gang zu kommen?
- Die Braunschweiger Zeitung meldete am 19.5.1987: 150 Menschen mehr in jeder Minute.
  Frage: Wann lebten Adam und Eva?

Beide Texte sind leicht zu verstehen. Im ersten Beispiel liegt die Schwierigkeit eher auf der linken Seite von Abb. 1, beim Verständnis der Sachsituation im zweiten Beispiel eher rechts, bei der Suche nach einer angemessenen mathematischen Strategie. Das Problem liegt nicht im Textverständnis, sondern bei der Modellierung der Sachsituationen.

1.2 Sprachgebrauch

These 2: Lesekompetenz wird durch passiven und aktiven Sprachgebrauch gefördert.[1] Dabei kommt häufig die Textproduktion zu kurz.

Im weitverbreiteten fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch findet meist ein Dreischritt (Maier/Schwaiger, 1999) statt:

- Zunächst wendet sich die Lehrkraft auffordernd mit Impulsen oder Mitteilungen an die Schüler. Diese Äußerungen sind meist als Instruktionen zu verstehen.
- Die folgenden Sprachbeiträge der Schüler sind in der Regel Antworten auf die Instruktionen der Lehrkraft.
- Im dritten Schritt reagiert die Lehrkraft auf die Schüleräußerungen mit bewertenden Kommentaren oder Sachaussagen, die in die nächste Instruktion münden.

Dieses Unterrichtsgespräch wird meist auf mittlerem bis hohem fachlichen Niveau geführt und zielt konvergent und kurzschrittig auf eine einzige Lösung hin (Baumert et al., 1997). Dies führt dazu, dass nur ein Teil der Klasse tatsächlich angesprochen wird. Mündliche und schriftliche Textproduktionen, die nicht nur kurze Antworten auf Fragen sind, kommen zu kurz. Selbst wenn die Lehrkraft darauf besteht, dass Antworten in ganzen Sätzen formuliert werden sollen, kann nicht ernsthaft von bedeutsamem aktiven Sprachgebrauch die Rede sein. Die Antwort auf die Frage „Was ergibt 3 mal 5?“ lautet schlicht 15. Wenn ein Text gewünscht wird, müsste man eine Frage der Art: „Wie überlegst du, wenn du 3 mal 5 rechnest?“ stellen.

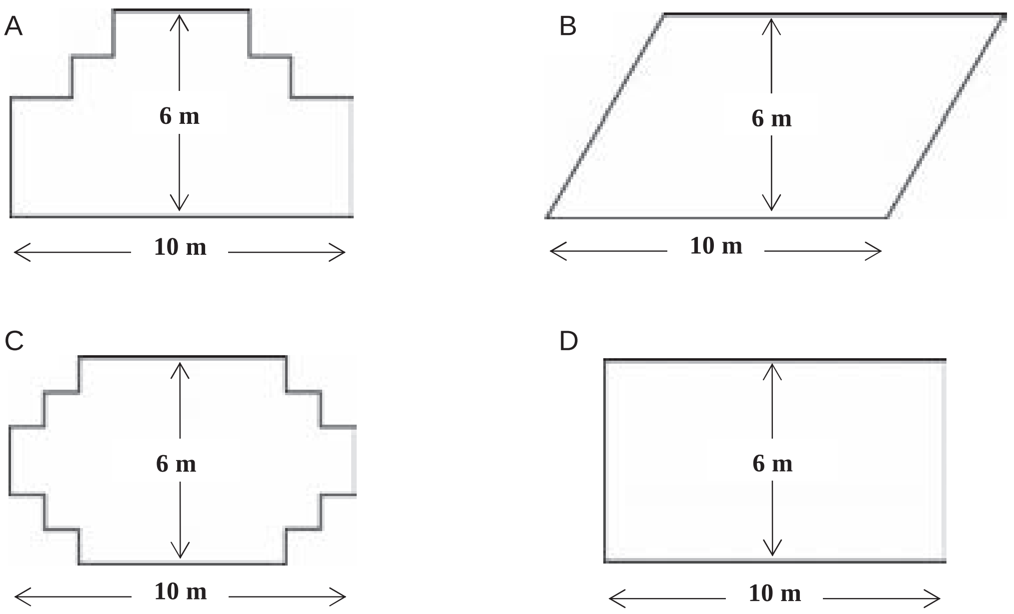
Zur Frage, wie im Unterricht ein gehaltvoller Austausch zwischen Schülern und Lehrern entstehen kann, sei auf die *Dialogische Didaktik* verwiesen, die für den Sprach- und den Mathematikunterricht entwickelt wurde, aber nicht darauf beschränkt bleiben muss (Gallin/Ruf, 1998). Sprach- und damit auch Leseförderung bedeutet einen häufigen Wechsel zwischen Produktion und Rezeption, zwischen Mündlichkeit und Schriftlichkeit (Maier/Schwaiger, 1999) und – zumindest in Lernphasen – Verzicht auf unnötige formale Strenge (Wagenschein, 1968) und frühzeitige Verwendung von Fachausdrücken. Die Aufgabe „Carpenter“ zeigt, wie wesentliche mathematische Inhalte auch ohne Verwendung von Fachausdrücken (hier: Umfang) behandelt werden können:

1 Schon beim Schriftspracherwerb in der Grundschule ist das bedeutsam (Brügelmann/Brinkmann, 2006).

CARPENTER

Question 1: CARPENTER M266Q01

A carpenter has 32 metres of timber and wants to make a border around a garden bed. He is considering the following designs for the garden bed.



Circle either "Yes" or "No" for each design to indicate whether the garden bed can be made with 32 metres of timber.

Garden bed design	Using this design, can the garden bed be made with 32 metres of timber?
Design A	Yes / No
Design B	Yes / No
Design C	Yes / No
Design D	Yes / No

Abb. 2: Aufgabe „Carpenter" (PISA) (OECD, 2003)

In einem Unterricht, der bestrebt ist, Lernprozesse anzuregen und zu begleiten, kommt der Dosierung der formalen Strenge hohe Bedeutung zu. Gerade im Fach Mathematik liegt es nahe, unmittelbar auf Fehler und Ungenauigkeiten hinzuweisen. Dies umso mehr, als ein kleinschrittiger Unterrichtsverlauf nur kurze Schüleräußerungen nahelegt und Fehler den Gedankengang stören oder unterbrechen könnten. Will man jedoch Schüler zu ausführlichen Erläuterungen und Argumentationen anregen, sind konstruktive Rückmeldungen nötig. Die Lehrkraft darf in entsprechenden Unterrichtsphasen nicht nach Defiziten suchen, sondern muss Entwicklungsmöglichkeiten finden und thematisieren. Nur so können Fehler den Lernprozess bereichern.

1.3 Motivation

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass Merkmale des Lesers und dabei insbesondere motivationale Aspekte bedeutsam sind (Artelt et al., 2007). An dieser Stelle sei eine kleine Polemik erlaubt: Von vielen Seiten wurde dem gängigen Mathematikunterricht vorgeworfen, er wäre zu weit weg von der Lebenswelt der Schüler. In Aufgaben müssten mehr Praxisbezüge und „sinnstiftende Kontexte" hergestellt werden. Kein Zweifel: Dies sind wichtige Aspekte, die auch das Bild von Mathematik entscheidend prägen können, das im Bewusstsein der Schüler entsteht (s. u.). Allerdings sollte der Praxisbezug in seiner Wirksamkeit auch nicht überschätzt werden. Aufgaben sind nicht allein deshalb attraktiv, weil sie sich mit Handytarifen auseinandersetzen. Sogar im vermutlich einzigen mathematischen Gebiet, das in allen Schularten vorkommt und unabhängig vom Beruf für alle Menschen im Alltag wichtig ist, nämlich der Prozentrechnung, gibt es massive Defizite. Wäre Praxisbezug allein motivierend, könnten die meisten Menschen Prozentrechnen.

Der Frage, was der Motivation im Mathematikunterricht förderlich ist, kann hier nicht umfassend nachgegangen werden. Woher die Motivation kommen kann, mathematische Texte und insbesondere Aufgabentexte verständnisvoll zu lesen, soll in folgender These zusammengefasst werden. Daraus ergeben sich auch Konsequenzen für die Formulierung solcher Texte:

These 3: Motivation kommt vom „Anfangen"'.

Wer begonnen hat, sich in ein Problem zu vertiefen, will auch über kurz oder lang dessen Lösung wissen. Die Herausforderung für Lehrkräfte besteht also darin, die Schüler dazu zu bringen, sich auf die Aufgabe überhaupt einzulassen. Sie muss daher so formuliert sein, dass das Interesse des Lesers geweckt wird und die Verständnishürde zu Beginn niedrig genug ist. Gut formulierte Texte berücksichtigen mindestens drei Aspekte:

- Der „Einstieg" soll *allen* Schülern einen Zugang zum Problem ermöglichen.[2]
- Im Mittelpunkt steht eine gehaltvolle Problemstellung – der „Kern der Sache".
- Der dritte Aspekt eines guten Textes lädt zum Weiterdenken ein. Hier werden Verbindungen hergestellt, neue Strategien entwickelt oder Spezialfälle verallgemeinert.

Zur Erläuterung werden im Folgenden zwei Texte zum selben Thema gegenübergestellt (Gallin/Ruf, 1998):

„Der Schnittwinkel zweier Kreise ist der Winkel der beiden Tangenten in einem Schnittpunkt. Wie groß ist der Schnittwinkel zweier Kreise, wenn

- die beiden Radien, die in einem Schnittpunkt enden, dort einen Winkel von 140° einschließen?
- die zu den beiden Schnittpunkten gezogenen Radien im Mittelpunkt des einen Kreises einen 70°- und im Mittelpunkt des anderen einen 40°-Winkel einschließen?"

Nun die zweite Version:

- „Zeichne […] zwei schön geschwungene Linien […], (die) sich mindestens einmal schneiden. Versuche, eine Vergrößerung der Kreuzungsstelle an einer anderen Stelle des Blattes zu zeichnen.
- Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven? […] Beschreibe, wo Probleme beim Messen auftauchen und welche Hilfslinien nützlich sein könnten.
- Wie könnte man allgemein einen Winkel zwischen zwei krummen Kurven definieren? Und wie lässt sich so auch der Winkel festlegen und messen, unter dem sich zwei Kreise schneiden?"

Diese Gegenüberstellung zeigt deutlich den Unterschied zwischen einem eher abschreckenden mathematischen Text und einer Einladung zum Nachdenken. Der zweite Text konzentriert sich auf den Kern der Sache und ermöglicht jedem Schüler einen motivierenden Einstieg.

2 Zur Rolle des Selbstkonzepts sei auf die einschlägige lernpsychologische Literatur verwiesen.

2. Vorschläge für den Mathematikunterricht

Über das geschilderte Unterrichtsgespräch hinaus sollten im Unterricht häufig Anlässe für aktiven und passiven Sprachgebrauch geschaffen werden. Folgende Textsorten sind möglich:

Erläuterungen:

Der Auftrag „Erkläre, wie du überlegt hast!" sollte den Schülern möglichst oft gestellt werden. In einem methodisch variantenreichen Unterricht mit Partner- und Gruppenarbeitsphasen ergibt er sich von allein. Hervorragende Erfahrungen wurden auch mit der Methode „Hausaufgabenfolie" (Felscher, 2002) gemacht. Ein Schüler löst die Hausaufgabe auf einer Folie und ist in der nächsten Stunde verantwortlich für die Besprechung und Verbesserung der Aufgaben. Im Idealfall werden Fragen, Fehler und Probleme ausschließlich zwischen den Schülern ausgehandelt, die Lehrkraft hält sich zurück und kann z. B. durch die Klasse gehen und einzelne Hefte durchsehen. Wesentlich im hier zu behandelnden Zusammenhang ist, dass mathematische Kommunikation und Argumentation geschützt durch umfassende Vorbereitungsmöglichkeit geübt werden können.

Begründungen:

In Prüfungssituationen ist es gängige Praxis, dass das bloße Ergebnis nicht akzeptiert wird, die Überlegungen des Schülers und sein Lösungsweg werden in der Regel eingefordert. Im Unterricht wird dies durch Fragen „Warum ist das so?" oder „Was wäre, wenn?" vorbereitet. Eine interessante Anregung ist in diesem Zusammenhang die „Aufgabenvariation" (Schupp, 2002). Zwar kann Mathematikunterricht häufig auf formale Beweise verzichten,[3] schlüssige Argumentationen spielen jedoch in einem verständnisorientierten Unterricht eine tragende Rolle (Hammer, 2009).

Eigenproduktionen:

Es gibt vielfältige Möglichkeiten, die Schüler anzuregen, eigene Texte (mündlich oder schriftlich) zu verfassen, die nicht ausschließlich mit der Lösung einer Mathematikaufgabe zu tun haben. Einige Beispiele seien hier erwähnt:

Aufgabenformulierung: „Stelle deinem Nachbarn eine Aufgabe zum aktuellen Thema."

Lernbericht: Nach einer Unterrichtssequenz schreiben die Schüler auf, was sie dabei gelernt haben. Dies sollte nicht nur abstrakt geschehen, sondern mit Beispielen erläutert werden: „Formuliere eine möglichst schwere Aufgabe, die du gerade noch lösen kannst!" (Felscher, 2008).

Lerntagebuch: Die Schüler dokumentieren ihre individuelle Auseinandersetzung mit einem fachlichen Thema. Hier muss auf die einschlägige Literatur verwiesen werden (vor allem Gallin/Ruf, 1998; Anneser, 2002; Ganserer/Waasmaier, 2008; Felscher, 2008). Auch didaktische Zeitschriften haben Hefte zu diesem Thema veröffentlicht (Praxis der Mathematik in der Schule, 2008; Mathematik lehren, 2000). Auch im Hinblick auf neue Formen der Leistungsbewertung, die nicht nur Lernergebnisse, sondern auch Lernprozesse in den Blick nehmen und Fördermöglichkeiten aufzeigen, spielen verschiedene Varianten der Dokumentation (z. B. Portfolios) eine wesentliche Rolle (Winter, 2004; ISB, 2008).

Um die Schüler gerade am Anfang nicht zu überfordern, bieten sich unterstützende Angebote als kleine Hilfen an, die etwa aus möglichen Satzanfängen oder Wortgeländern (Begriffe, die im Text vorkommen sollten) bestehen können.

Im Folgenden wird eine kleine Auswahl an exemplarischen Beispielen für den Unterricht vorgestellt, die interessante Kommunikationsanlässe bieten können:

3 In modernen Lehrplänen ist das Kapitel „Beweisen" meist nicht mehr zu finden.

2.1 Mathematik aus der Zeitung

In der Süddeutschen Zeitung vom 3.2.2007 war folgende Grafik abgedruckt:

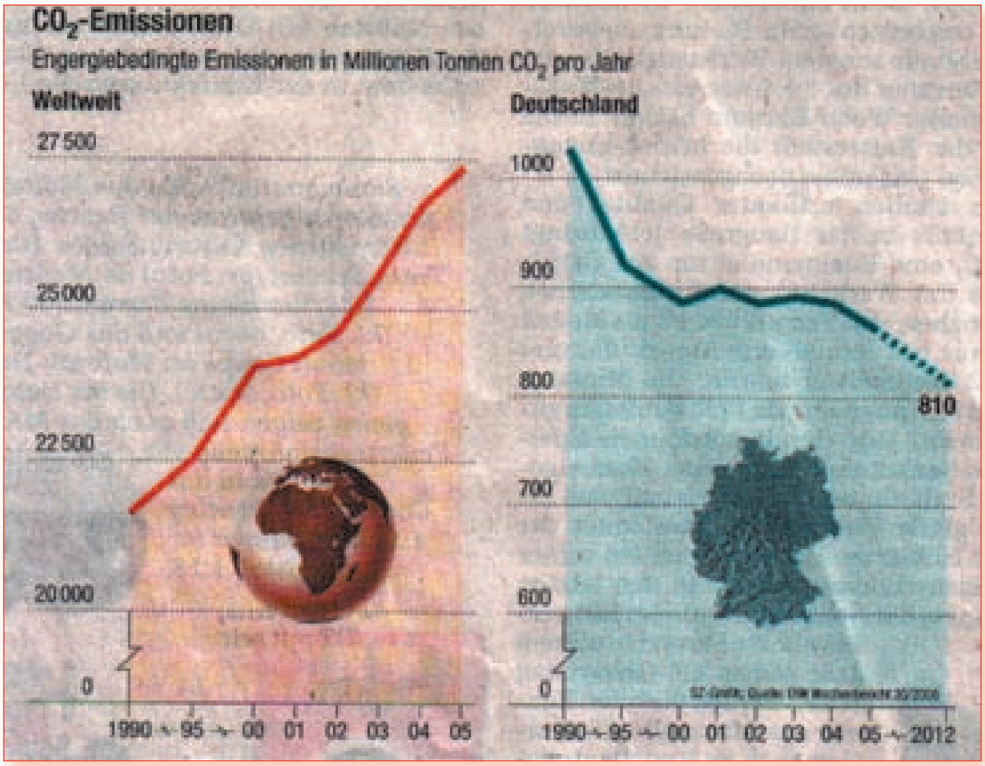
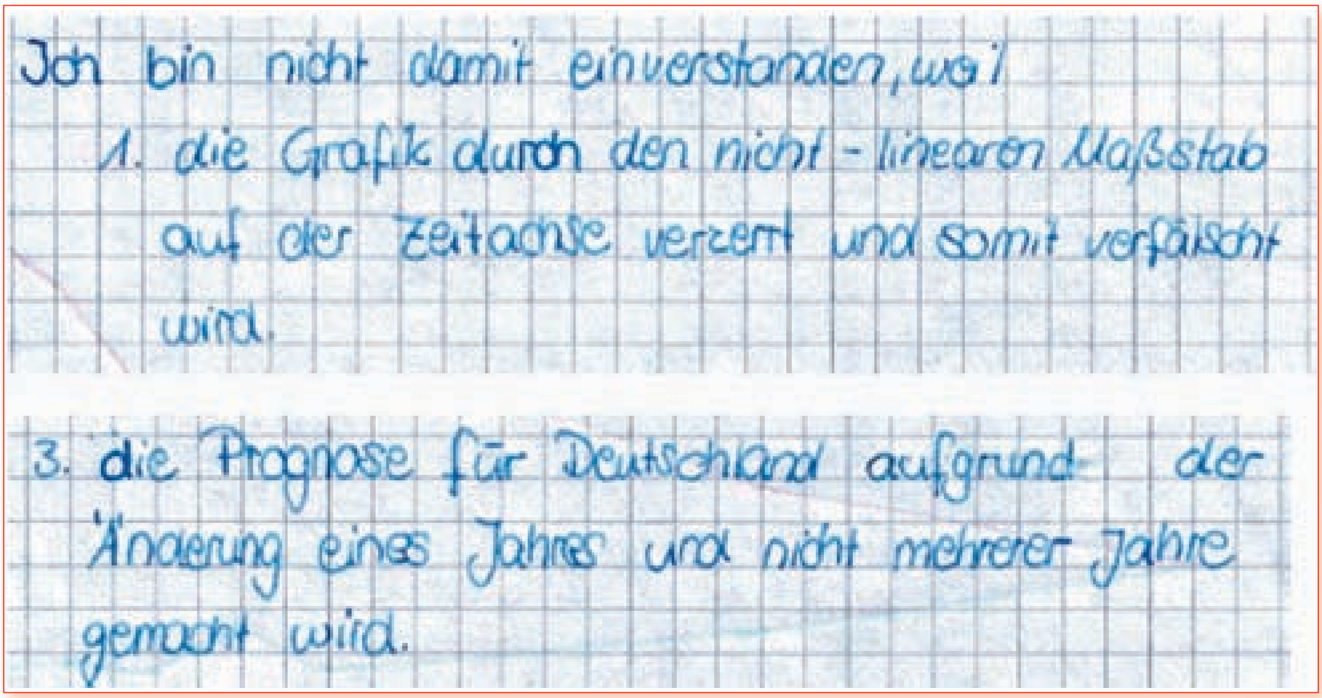


Abb. 3: Zeitungsausschnitt (SZ vom 3.2.2007)

Schülern einer 7. Jahrgangsstufe wurde unter anderem die Frage vorgelegt, ob sie mit dieser Darstellung einverstanden seien. Auszüge aus Schülerdokumenten zeigen überzeugende mathematische Argumentationen:



Ich bin nicht damit einverstanden, weil
1. die Grafik durch den nicht-linearen Maßstab auf der Zeitachse verzerrt und somit verfälscht wird.

3. die Prognose für Deutschland aufgrund der Änderung eines Jahres und nicht mehrerer Jahre gemacht wird.

Abb. 4: Ausschnitte aus dem Text von Sabine S.


Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob Deutschland fast so an CO_2 eingespart hätte, wie in der Welt angestiegen ist.

Abb. 5: Ausschnitt aus dem Text von Lena N.

Die Problematik der nicht linearen Achsenteilung findet sich in den Medien häufig und wurde im Unterricht schon thematisiert. Es ist bemerkenswert, dass die Schülerinnen weitere interessante Argumente gefunden haben. In diesem Fall war es günstig, die Aufgabe schriftlich bearbeiten zu lassen. So werden die differenzierten Überlegungen der Schülerinnen deutlich. Aufgaben aus der Zeitung bieten eine reichen Schatz an Beispielen, die nach kritischer Auseinandersetzung (z. B. „Schreibe einen Leserbrief!") verlangen. Dazu gibt es zahlreiche Publikationen (z. B. „Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung"; Herget Scholz, 1998).

2.2 Entdeckung von Mustern

In der Mathematik als Wissenschaft von Mustern (Wittmann/Müller, 2007) können immer wieder überraschende Strukturen entdeckt werden, die nach Begründung verlangen. Im Idealfall kann man sich gegen die Frage nach dem Warum gar nicht wehren. Viele Beispiele dazu finden sich in der elementaren Arithmetik, wo Muster in Rechenergebnissen auftreten (z. B. ANNA – Zahlen; Steinweg/Schuppar, 2004) können.

Auch Knobelfragen fordern Begründungen heraus. Hier ein Beispiel: Betrachten wir eine Person beim Treppensteigen. Angenommen, es wäre ihr nur möglich, die Stufen einzeln oder zwei auf einmal zu nehmen. Auf wie viele Arten kann die Person eine Treppe mit 1, 2, 3, …, 70, … Stufen hinaufsteigen?

Es ist leicht einzusehen, warum sich hier Fibonacci-Zahlen ergeben:
Ist man z. B. auf der 70. Stufe angekommen, war der letzte Schritt entweder ein einzelner – dafür gab es so viele Möglichkeiten wie bei 69 Stufen – oder es war ein Doppelschritt, dann gab es so viele Möglichkeiten wie für 68 Stufen. Für 70 Stufen gibt es also so viele Möglichkeiten wie für 68 und 69 Stufen zusammengenommen.

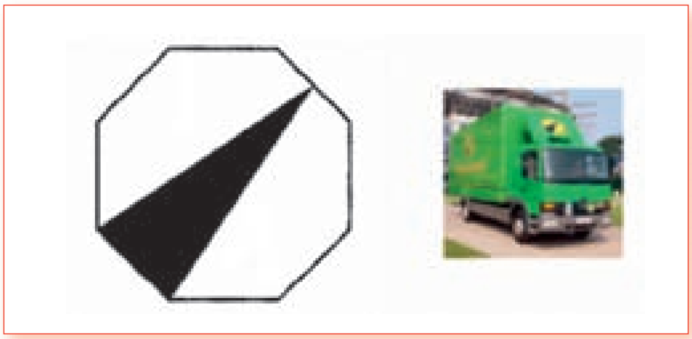
Das folgende Beispiel (Herget et al., 2001) zeigt eine Übung zur Bruchrechnung, bei der ein interessantes Muster auftaucht:

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48}$; $\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}$; $\quad \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{180}$;

Wie geht es weiter? Warum?

2.3 Kopfgeometrie

Vielfältige Möglichkeiten, den Sprachgebrauch im Mathematikunterricht zu intensivieren, ergeben sich bei kopfgeometrischen Übungen, für die es noch weitere bedeutsame Argumente gibt. Beschreibungen, Erläuterungen, Begründungen gehören zum Kern des Geometrieunterrichts. Im Beispiel soll gezeigt werden, wie Schüler durch einen Text im Erzählstil auf eine Gedankenreise mitgenommen werden können:



Wir gehen vom Logo einer Speditionsfirma aus und stellen die Frage: Welcher Bruchteil der Figur ist schwarz gefärbt?

Abb. 6: Achteck

Die Schüler erhalten den Auftrag, den Gedanken der Lehrkraft zu folgen. Es geht *nicht* darum, die Frage selbst zu bearbeiten. Die Lehrkraft könnte zum Beispiel folgenden Text vortragen:

Zunächst betrachte ich das Rechteck, das entsteht, wenn man die Ecken der Basis des gleichschenkligen Dreiecks mit den beiden Achteckspunkten neben der Spitze verbindet. Es ist klar, dass das Dreieck halb so groß wie das Rechteck ist. Zur Begründung könnte man die Dreiecksspitze längs der Achteckseite zu einer Ecke des Rechtecks verziehen, sodass eine Dreiecksseite Diagonale wird. Da Grundlinie und Höhe unverändert bleiben, gilt dies auch für den Flächeninhalt.

Aber: An dieser Stelle komme ich nicht weiter. Wir starten einen neuen Versuch: Wieder verziehe ich die Dreiecksspitze, nun aber in den Mittelpunkt des Umkreises des Achtecks. Der Flächeninhalt des neuen Dreiecks ist halb so groß wie der des gegebenen Dreiecks (Begründung…). Von diesem kleinen Dreieck weiß ich aber sofort, welchen Anteil es an der Achtecksfläche hat …

Natürlich kann der Text noch weiter ausgeschmückt werden. Diese Übung hat neben der hier in Rede stehenden Förderung des Textverständnisses einige weitere Vorteile. Sie schult auch das geometrische Vorstellungsvermögen und die Konzentrationsfähigkeit. Der Text macht die Bedeutung von Fachausdrücken für die Kommunikation in zwangloser Weise offensichtlich. Die Lehrkraft hat an mehreren Stellen die Möglichkeit, alternative Begriffe zu verwenden und gezielt einzusetzen.

3. Bild von Mathematik

Folgender Text einer Oberstufenschülerin zeigt, welches Bild sie von der Mathematik entwickelt hat (Krainer/ Stern, 2004):

„Das versiegelte, verschlossene Buch ist nicht für jeden zugänglich. Nur mit dem Schlüssel ist es möglich, das Buch zu öffnen. Aber selbst wenn das Buch aufgeschlagen ist, muss man den Inhalt nicht verstehen. Entweder man hat das Verständnis oder nicht!!! Um das Buch verstehen zu können, muss man es von vorne bis hinten durchlesen."

In beeindruckender sprachlicher Prägnanz zeigt dieser Text, welche Folgen ein Mathematikunterricht hat, der Regeln und Algorithmen in den Mittelpunkt stellt. Mathematik wird als fertig, unveränderlich und unzugänglich erlebt. Im Gegensatz dazu beschreibt PISA eine völlig andere Vorstellung:

„Mathematische Kompetenz besteht also für PISA nicht nur aus der Kenntnis mathematischer Sätze und Regeln und der Beherrschung mathematischer Verfahren. Mathematische Kompetenz zeigt sich vielmehr im verständnisvollen Umgang mit Mathematik und in der Fähigkeit, mathematische Begriffe als Werkzeuge in einer Vielfalt von Kontexten einzusetzen. Mathematik wird als wesentlicher Inhalt unserer Kultur angesehen, gewissermaßen als eine Art von Sprache, die von den Schülerinnen und Schülern verstanden und funktional genutzt werden sollte." (Klieme et al., 2001)

In diesem Sinn dient ein Unterricht, in dem der Sprachgebrauch eine wesentliche Rolle spielt, der Entwicklung eines flexiblen Bildes von Mathematik. Mathematik wird als Wissenschaft erlebt, die eher hilft, Probleme zu lösen als diese zu schaffen.

Literatur

Anneser, F. (2002): Lerntagebücher. In: Hammer, C. (Hrsg.): *Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts – Erfahrungsbericht der Bayerischen SINUS-Schulen*. Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. München.

Artelt, C. et al. (2007): *Förderung von Lesekompetenz – Expertise*. Bundesministerium für Bildung und Forschung. Bonn, Berlin.

Baumert, J. et al. (1997): *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“.* Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung. Bonn.

Baumert, J. et al. (2002): *PISA 2000 – Die Länder der Bundesrepublik Deutschland im Vergleich.* Opladen.

Blum, W./Leiss, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der Tanken-Aufgabe. *mathematik lehren*, Nr. 128.

Brügelmann, H./Brinkmann, E. (2006): *Warum freies Schreiben wichtig ist.* [http://www.agprim.uni-siegen.de]

Enzensberger, H. M./Berner, R. S. (1997): *Der Zahlenteufel.* München, Wien.

Felscher, M. (2008): Reflexion des Lernfortschritts mit dem Mathetagebuch. In: Hammer, C. (Hrsg.): *SINUS Bayern – Beiträge zur Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.* Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. München.

Felscher, M./Weber, S. (2002): Hausaufgabenfolie. In: Hammer, C. (Hrsg.): *Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Erfahrungsbericht der Bayerischen SINUS-Schulen*. Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. München.

Fröhlich, I. et al. (2008): Sprichst du Mathe? *Praxis der Mathematik in der Schule*, Nr. 24.

Gallin, P./Ruf, U. (1998): *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Seelze-Velber.

Ganserer, L./Waasmaier, S. (2008): Ansätze dialogischen Lernens. In: Hammer, C. (Hrsg.): *SINUS Bayern – Beiträge zur Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts*. Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. München.

Hammer, C. (2009): Vom Argument zum Beweis. Logische Begründungen und präformale Beweise. *mathematik lehren*, Nr. 155.

Hechenleitner, A./Mayr, E. (2008): *Pädagogisch diagnostizieren im Alltag*. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, München. [ISB]

Herget, W./Scholz, D. (1998): *Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung*. Seelze.

Herget, W. et al. (2001): *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I*. Berlin.

Klieme, E. et al. (2001). *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen.

Krainer, K./Stern, T. (2004): „Mathe ist mehr“. Unterrichtsentwicklung in Mathematik als Impuls für „lernende Schulen“. *Lernende Schule*, 4, 10–14.

Kultusministerkonferenz (2003): *Nationale Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* KMK, Bonn.

Maier, H./Schweiger, F. (1999): *Mathematik und Sprache*. Wien.

Niederdrenk-Felgner, C. et al. (2000): Mathematik und Sprache. *mathematik lehren*, Nr. 99.

OECD (2003): Test questions – PISA 2003. [http://www.oecd.org]

Ruch, H./Sachse, M. (2008): *ProLesen. Auf dem Weg zur Leseschule*. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. München.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Hildesheim, Berlin.

Steinweg, A. S./Schuppar, B. (2004): Mit Zahlen spielen. In: Müller, G. N. u. a. (Hrsg.): *Arithmetik als Prozess*. Seelze.

Wagenschein, M. (1968): *Verstehen lehren*. Weinheim, Basel.

Winter, F. (2004): *Leistungsbewertung. Eine neue Lernkultur braucht einen anderen Umgang mit Schülerleistungen*. Baltmannsweiler.

Wittmann, E. C./Müller, G. N. (2007): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: Walther, G. et al. (Hrsg.): *Bildungsstandards für die Grundschule. Mathematik konkret*. Berlin.